Métodos Numéricos
2 de diciembre de 2022
Recuperatorio
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas ☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Lib. Univ.	Nombre y Apellido
	Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 | Nota	

1. (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz estrictamente diagonal dominante.[1] Probar que $Nu(A) = \{0\}$. (*Sugerencia*: considerar $fila_i(A) \cdot x$ siendo $|x_i| = ||x||_\infty$.) (9 puntos)
   (b) Sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz que cumple $B \neq 0$ y $B^2 = 0$. Probar que $dim(Nu(B)) = 2$. (8 puntos)
   (c) Sea $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ estrictamente diagonal dominante. Probar que $dim(Nu(C^2)) \neq 3$. (8 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (a) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso. (4 puntos c/ítem)
      i. Si B tiene factorización LU entonces AB también.
      ii. Si A es además triangular inferior y AB tiene factorización LU, entonces B tiene factorización LU.
      iii. Si A es simétrica definida positiva y existe P ortogonal tal que $B = PAP^t$, entonces B tiene factorización LU.
   (b) Probar que si B no es inversible entonces existe un $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que $(A-B)x = Ax$. (4 puntos)
   (c) Probar que si B no es inversible entonces $\frac{1}{\kappa(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$, siendo $\kappa(\cdot)$ el número de condición y $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada. (10 puntos)

3. Sea $z \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con $A = LL^t$ su factorización de Cholesky. Consideremos la factorización QR de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} L^t \\ z^t \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior y $Q \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ ortogonal. Probar:
   (a) $A + zz^t$ es simétrica definida positiva. (7 puntos)
   (b) R es inversible. (8 puntos)
   (c) Si R tiene diagonal positiva, entonces R^tR es la factorización de Cholesky de $A + zz^t$. (9 puntos)

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ y $w \in \mathbb{R}^m$. Se desea agregar una columna w a A y hallar la factorización QR de esta nueva matriz ampliada aprovechando la factorización original de A. Consideremos

$$A = (A_1 \quad A_2) = Q\,(R_1 \quad R_2)$$

la factorización QR de A, con $A_1, R_1 \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $A_2, R_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-k)}$, $k < n$, y sea $\widetilde{A} = (A_1\ w\ A_2) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ la matriz A con la columna w agregada.
   (a) Hallar un vector z de forma tal que $\widetilde{A} = Q\widetilde{R}$, con $\widetilde{R} = (R_1\ z\ R_2)$. (5 puntos) (*Nota*: la matriz $\widetilde{R}$ no necesariamente es triangular superior.)
   (b) Diseñar un algoritmo que triangule $\widetilde{R}$ usando a lo sumo $m-k-1$ rotaciones. Explicitar cada una de las rotaciones mencionando el efecto sobre la matriz a triangular. (10 puntos)
   (c) Hallar la factorización QR de $\widetilde{A}$ y justificar cómo construirla a partir de las rotaciones y la factorización de A existente. (10 puntos)

[1] Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *estrictamente diagonal dominante* si $\forall i \in \{1,\ldots,n\} : |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$